



TITLE:

Supersingular K3 Surfaces (代数幾何学の研究)

AUTHOR(S):

ARTIN, M.; 塩田, 徹治

CITATION:

ARTIN, M. ...[et al]. Supersingular K3 Surfaces (代数幾何学の研究). 数理解析研究所講究録 1973, 183: 8-17

ISSUE DATE:

1973-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107174>

RIGHT:

Supersingular K3 surfaces

M. I. T. M. Artin

(東大理 塩田 徹治記)

標数 $p > 0$ の曲面を研究する際の二つのテクニックと、
その (橋田的) K3 曲面への応用について述べる。

§ 1. 形式的 Brauer 群

これについては、数年前 Mazur と私が研究したが、
未発表である。 X/k を proper scheme とするとき

問題 コホモロジー群 $H^0(X, G_m)$ を調べよ。

(ここに G_m は 乗法群)

$g = 0, 1$ のとき $H^0(X, G_m)$ は k 上の group scheme の構造
をもつが、 $g \geq 2$ のとき一般には $H^0(X, G_m)$ は代数的
な構造をもたないことが知られている。

例 $g = 2$, かつ解析的の場合 ($k = \mathbb{C}$)。完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{hol} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{hol}^\times \rightarrow 0$$

から 次のコホモロジーの完全列を得る: ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{hol}$ とかい)

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(X, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{O}) & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{O}^*) & \rightarrow & H^3(X, \mathbb{Z}) \\ \text{有限生成} & & \text{vector space}/\mathbb{C} & & & & \text{有限生成} \end{array}$$

従って $H^2(X, \mathcal{O}^*)$ の "連結成分" は $H^2(X, \mathcal{O}) / H^2(X, \mathbb{Z})$ であり、一般に $H^2(X, \mathbb{Z})$ の像は $H^2(X, \mathcal{O})$ において discrete とはいえないから、商空間 $H^2(X, \mathcal{O}) / H^2(X, \mathbb{Z})$ はよい構造をもたない。なお、代数的構造層 \mathcal{O} については

$$H^2(X, \mathcal{O}^*) = \text{the torsion part of } H^2(X, \mathcal{O}_{hol}^*)$$

となっている。

さて $H^0(X, G_m)$ の 0-class の変形を考える。即ち

A を k 上有限次元の代数, $S' = \text{Spec}(A)$, $X' = X \times_k S'$,

と k 上の augmentation $A \rightarrow k$ のひきおこす morphism $X \rightarrow X'$ とするとき

$$A \rightsquigarrow \text{Ker} \{ H^0(X', G_m) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^0(X, G_m) \}$$

を考える。Schlessinger 理論により、次のことが成る。

Cor. (1) a versal formal deformation (hull) が存在する。

(2) $H^{0,1}(X, G_m)$ が smooth hull をもては;

(H^0 は 1 定) universal deformation が存在。

(3) $H^{0,1}(X, G_m) = 0$ ならば hull は smooth.

(4) もし (2), (3) が成立すれば, hull は k 上の smooth formal group Z . Z の次元 $= \dim H^0(X, \mathcal{O})$.

今, $X \in \text{Pic } X$ が smooth であるような \mathcal{O}_X 曲面とし $g = 2$ に対し, 上記のことを適用する. 仮定より (2), (3) が満たれるから, formal group が得られる.

Def. この formal group $\hat{\text{Br}} X$ を formal Brauer group とよび, $\hat{\text{Br}} X$ とかく.

$$\dim \hat{\text{Br}} X = h^{0,2} = \dim H^2(X, \mathcal{O}).$$

(注意. 標数 0 のとき, $h^{0,2}$ の formal group は vector group $H^0(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{\exp} H^0(X, \mathcal{O}^\times)$ の完備化で与えられる.)

(標数 $p > 0$ の)

以下 $X \in \mathcal{K}_3$ 曲面とする. 定義により, X の不変量は

$$p_g = p_a = 1, \quad K = 0. \quad (\Rightarrow b_2 = 22).$$

で与えられる. 従って, $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ だから, $\text{Pic } X$ は smooth, かつ $h^{0,2} (= p_g) = 1$ だから, $\hat{\text{Br}}(X)$ は

1-parameter formal group となる. Z の height h とする; i.e. $p^h = \text{rank}(\ker(\hat{\text{Br}} \xrightarrow{p} \hat{\text{Br}}))$, $1 \leq h \leq \infty$.

$h = 1, 2$ or ∞ なる 1-par. formal group は 夫々

G_m (乗法群), supersingular elliptic curve,

or G_a (加法群)

(i.e. その完備化)
に対応する formal group である。

一般に、曲面 X の 2 次元 Betti 数 b_2 , Picard 数 ρ ($\rho = \text{rank } NS(X)$) とすると $b_2 \geq \rho$ であるが、
標数 0 のとき、より強い古典的公式が成立する：

$$b_2 - \rho \geq 2h^{0,2}$$

(この公式は、標数 $p > 0$ のとき一般に成り立たない) ~~が~~ $p > 0$,
 X が K3 のとき、 $\hat{Br} X$ の height h は次のように
Picard 数 ρ に関係している：

Theorem. X は、標数 0 に lift できると仮定する。

もし $\hat{Br} X$ の height $h < \infty$ ならば、

$$b_2 - \rho \geq 2h$$

Cor. 同様の仮定の下に、($b_2 = 22$ に注意)

$$h < \infty \Rightarrow \begin{cases} h \leq 10 \\ \rho \leq 22 - 2h \leq 20 \end{cases}$$

$$b_2 = \rho \Rightarrow h = \infty \quad (\text{逆は?})$$

下記参照

Def. $b_2 = \rho$ なる K3 曲面を Supersingular
K3 surface とよぶ。

任意の標数 $p > 0$ において、Supersing. K3 が存在する
ことが知られている。(cf. Shioda [2]).

Conjecture ^(for any surface) \hat{B}_r が p^r ではない。
 $b_2 = p$?

Theorem X is elliptic K3 surface とする。
 $h = \infty \iff p = 22 (= b_2)$
 i.e. supersingular

さて height h の formal group における
 “ p 回の和” (群において p 倍に相当) は

$$\begin{aligned} k[[x]] &\longrightarrow k[[x]] \\ x &\longrightarrow \sum_{h=0}^{\infty} a_{ph} x^{p^h} + \dots \end{aligned}$$

で表わされる。

そこで K3 surfaces の族が与えられるとすると

formal group law, 従って a_{ph} , の係数は代数的
 に変えるから、次のことが分る:

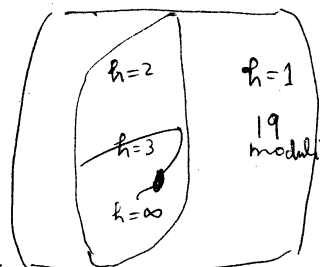
Cor “height が 1 増える” ということは
 $\text{Codim} \leq 1$ の条件である。

^(ウツ)
 K3 surfaces の moduli 数は 19 である。

$$\begin{cases} h=r \text{ なる K3 の moduli 数 } \geq 20-r \\ h=\infty \text{ " " } \geq 9 \end{cases}$$

かように、supersing. K3 は (=?)

非常に特殊ながら、多くの parameters に依存している。



§ 2. Flat duality

C を体 k 上の smooth curve とする. 標数 0 のときは H^0 と H^{2-q} ($q=0,1$) の間に Poincaré duality がある. 標数 p のとき, C 上の group scheme を考えるときが重要である. A を finite flat, comm. group scheme on C とすると, flat cohomology 群

$$H_{\text{fl}}^q(C, A)$$

が定義される. これを functorial に考えると, γ の上に代数的構造が入る. あたかも $\pi: C \rightarrow S = \text{Spec}(k)$ の base change $S' \rightarrow S$ により, functor

$$\underline{H}^q(A) = R^q \pi_* A : (\text{Schemes}/S)^0 \rightarrow (\text{Sets})$$

が得られる.

Theorem $\left\{ \begin{array}{l} \underline{H}^0(A) \text{ は 任意の } q \text{ について, group scheme} \\ \underline{H}^q(A) = 0 \quad q > 2 \\ \underline{H}^0 : \text{finite group scheme} \\ \underline{H}^1, \underline{H}^2 : \text{extensions of finite gr. sch. by} \\ \text{unipotent groups.} \end{array} \right.$

更に, Poincaré duality が予想される (Grothendieck).
 あたかも A の Cartier dual $A^D = \underline{\text{Hom}}(A, G_m)$ とすると, $\underline{H}^q(A)$ と $\underline{H}^{2-q}(A^D)$ の, \mathbb{Q}/\mathbb{Z} に値をもつ duality が期待される. しかし $\underline{H}^0(A)$ は infinitesimal

part を一般に含んでいるから、それを無視したものを $H^0(A)$ とかく: $H^0(A) = \underline{H}^0(A) / \text{infinitesimal part.}$

この (info part) を無視した quasi-alg. gr. scheme の category (それは abelian cat. になる) について:

$$\begin{cases} \text{Hom}(G_a, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \\ \text{Ext}^1(G_a, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = G_a \end{cases}$$

が成立する。

Conjecture $H^*(A) \simeq \underline{R}\text{Hom}(H^*(A^D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$

今 $H^0(A)$ の unipotent part, discrete part をそれぞれ $U^0(A), D^0(A)$ と表すとき (i.e.

$$0 \rightarrow U^0(A) \rightarrow H^0(A) \rightarrow D^0(A) \rightarrow 0.)$$

これらの群の間には次の duality が成立することに注意:

$$\begin{array}{ccc} & D^0 & U^0 = 0 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ G D^1 & & U^1 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & D^2 & U^2 \end{array}$$

(^{eps} unip. parts は 3.7.3 の top manifold の整係数 cohomology $H^0(\mathbb{Z})$ の torsion part のように振舞う.)

以上 C が curve の場合である。高次元の対称体について、coeff. module として何が適当か明らかでないが、surfaces については次のことが示されている:

$A = \mu_{p^v}$ とすると、これは auto-dual coeff. sheaf.

$$0 \rightarrow U^0(\mu_{p^v}) \rightarrow H^0(\mu_{p^v}) \rightarrow D^0(\mu_{p^v}) \rightarrow 0$$

よって、次の duality が成立する。

$$\begin{array}{ccc} D^0 = 0 & & U^0 = 0 \\ \nearrow D^1 & & U^1 = 0 \\ \circlearrowleft D^2 & & \nearrow U^2 \\ \searrow D^3 & & \circlearrowleft U^3 \\ D^4 = 0 & & U^4 = 0 \end{array}$$

上記のことは、supersingular K3 X に適用する。

仮定より、 $\text{Pic } X = L \simeq \mathbb{Z}^{22}$ は、素数 p と互素な素数 p の

二次形式を持つ格子群である。 L は even (i.e.

$(u, u) \equiv 0 \pmod{2}$ for all $u \in L$) , signature $(+1, -21)$

(\because Hodge index th. 12.8.3) , かつ $\forall p \nmid p$ 式 $\det(L) = -p^v$ と

なる。さて、Kummer exact sequence

$$0 \rightarrow \mu_p \rightarrow G_m \xrightarrow{p} G_m \rightarrow 0$$

から exact sequence

$$L \xrightarrow{p} L \rightarrow H^2(\mu_p) \rightarrow \text{Br}(X) \xrightarrow{p} \text{Br}(X)$$

を得る。 X の $h = \infty$ であることより、 $\text{Br}(X) \xrightarrow{p} \text{Br}(X)$ は

0-map であることが分かる。故に

$$\begin{cases} U^2(\mu_p) = G_a \\ D^2(\mu_p) = \text{some } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{-vector space} \\ \text{with non-deg. sym. form} \end{cases}$$

$$V = \{ v \in L \mid (v, w) \equiv 0 \pmod{p}, \forall w \in L \} \quad \text{とある.}$$

次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ V & \xrightarrow{\text{"period map"}} & G_a (= U^2) & \longrightarrow & B_r & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ L & \longrightarrow & H^2(\mu_p) & \longrightarrow & B_r & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ D^2(\mu_p) & \xrightarrow{\quad} & D^2(\mu_p) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Facts. $L^* = \text{Hom}(L, \mathbb{Z}) (\hookrightarrow L)$ とある.

- (1) L^*/L は elementary p -group
- (2) $|V/pL| = -\det L = p^{2\sigma_0}$, ($\sigma_0 \in \mathbb{Z}$) if $p \neq 2$.
- (3) $|D^2(\mu_p)| = p^{2\sigma}$, $\sigma + \sigma_0 = 11$
- (4) $1 \leq \sigma_0 \leq 11$ (多分 $\sigma_0 \leq 10$?)

Theorem. X が有限体 \mathbb{F}_q 上定義された supersing. (elliptic) $K3$ surface とすると $|Br(X)|$ は S -函数で表す Tate の公式 ([3] の予想 (C)) が成立つ.

注意. elliptic $K3$ surface / \mathbb{F}_q に関する Tate 予想.
 ("Picard 数 $\neq S$ の pole の位相") は最近 Artin, Swinnerton-

Dyer によって証明された [1]. 従って λ 上 (cf. [3]) にいう Tate の公式の non- p part に関する主張は, 任意の elliptic $K3$ $/E_q$ について証明された訳である. 上の Th. は, superising. なものについて, さらに p -part についても正しいことを主張している.

参考文献

- [1] M. Artin, H.P.F. Swinnerton-Dyer, The Shafarevich-Tate Conjecture for pencils of elliptic curves on $K3$ surfaces, to appear in Invent. Math.
- [2] T. Shioda, Algebraic cycles on certain $K3$ surfaces in characteristic p , Abstract for Manifold Conference, 1973.
- [3] J. Tate, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Sem. Bourbaki 1965/66. n° 305

付記. 最後の Th. は λ Flat anality を仮定して λ 上の証明 λ によっていえる由である.